



Schulinterner Lehrplan – Sek II

Mathematik

Emmy-Noether-Gesamtschule

Risgeskirchweg 1

41564 Kaarst

Tel.: 02131 – 20 27 512

Inhaltsverzeichnis

1	Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit	3
2	Die Fachgruppe Mathematik.....	4
3	Entscheidungen zum Unterricht	5
3.1	Unterrichtsvorhaben.....	5
3.1.1	Übersicht über die Unterrichtsvorhaben	6
3.1.2	Konkretisierte Unterrichtsvorhaben Einführungsphase	8
3.1.3	Konkretisierte Unterrichtsvorhaben GK Qualifikationsphase	18
3.1.4	Konkretisierte Unterrichtsvorhaben LK Qualifikationsphase	43
3.2	Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit.....	80
3.3	Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung.....	82
3.4	Lehr- und Lernmittel	87
4	Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen.....	88
5	Qualitätssicherung und Evaluation	89
6	Inkrafttreten	90

1 Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit

Die Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften der Weltgeschichte und sie ist ausgesprochen vielfältig. Sie hilft den Menschen, ihre Alltagsprobleme besser zu verstehen und zu lösen und inspiriert die Forscher, in Wissenschaft und Industrie auftretende Probleme zu bearbeiten.

Die Schule soll Schüler*innen fördern und fordern und sie auf die Anforderungen des Lebens in der modernen Gesellschaft und des Arbeitslebens vorbereiten. Diese Aufgaben bestimmen nicht nur die allgemeinen Bildungs- und Lernziele der Schule, sondern auch die Ziele für das Fach Mathematik.

Ziel des Mathematikunterrichts ist es, Erscheinungen aus dem Alltag, der Gesellschaft, der Natur und der Kultur zu erkennen und mit Hilfe der Mathematik zu verstehen, sowie Gesetzmäßigkeiten und Verfahren nachzuvollziehen, anzuwenden oder am theoretischen Modell selbst zu entdecken.

Die Schüler*innen lernen in steigendem Maße Sachverhalte der modernen Lebenswelt in mathematische Darstellungen zu übertragen, zu analysieren und zu bewerten. Die erworbenen mathematischen Kompetenzen finden daher auch in anderen Fächern ihre Anwendung.

Freude an der Mathematik und Vertrauen in die eigene erfolgreiche Bewältigung mathematischer Aufgabenstellungen zu stiften, ist ebenso Aufgabe des Mathematikunterrichts wie die Förderung der Kreativität, von Argumentations- und Mathematisierungsfähigkeit.

Mathematik ist eine für viele Disziplinen unverzichtbare Grundlagenwissenschaft.

Dabei lernen unsere Schüler*innen anhand mathematischer Inhalte typische Arbeitsweisen kennen, die auch fächerübergreifend von großer Bedeutung sind:

- Zusammenhänge erkennen, reflektieren, begründen und beweisen;
- Problemstellungen analysieren und sachgerecht beschreiben;
- Lösungsmethoden flexibel auswählen, übertragen, anwenden und entwickeln;
- Ergebnisse beurteilen, dokumentieren und präsentieren.

Dazu sind die Inhalte und methodischen Fähigkeiten bzw. Kompetenzen, die im Fach Mathematik vermittelt werden sollen, durch das schulinterne Curriculum festgelegt. Dieses richtet sich nach den Vorgaben des Landes mit den KMK-Bildungsstandards und den einheitlichen Anforderungen für die Zentralen Prüfungen und ist auf die Bedürfnisse unserer Schüler*innen zugeschnitten:

- es fordert systematisches Wiederholen und Vernetzen sowie die Stärkung des Anwendungsbezugs;
- es betont die große Bedeutung des mathematischen Grundwissens;
- es gliedert sich in die vier Themenstränge Zahlen, Funktionen, Geometrie und Stochastik.

Im Rahmen der individuellen Förderung werden Programme und eine Vielzahl von Wettbewerben (z. B. Känguru-Wettbewerb, Mathematik-Olympiade, Mathe im Advent oder der Online-Mathematikwettbewerb) angeboten, die sich für Schüler*innen mit erhöhtem Förderbedarf ebenso eignen wie für besonders begabte Schüler*innen.

2 Die Fachgruppe Mathematik

Die Emmy-Noether-Gesamtschule ist die einzige Gesamtschule der Stadt Kaarst und liegt im Stadtteil Büttgen unweit der Grenze zur Stadt Korschenbroich.

Die Gesamtschule in Kaarst-Büttgen ist in der Sekundarstufe I durchgängig fünfzügig. Sie ist eine gebundene Ganztagschule mit 45-Minuten-Rhythmus und Unterricht an den Langtagen bis 16:00 Uhr.

In der Gymnasialen Oberstufe lernen ca. 240 Schüler*innen. Neben ca. 80 eigenen Schüler*innen wechseln in die Einführungsphase der Sekundarstufe II regelmäßig etwa 15 externe Schüler*innen von den benachbarten Realschulen in unsere gymnasiale Oberstufe.

In der Regel werden in der Einführungsphase vier parallele Grundkurse eingerichtet, aus denen sich für die Q-Phase Leistungs- und Grundkurse entwickeln. Der Unterricht findet im 45-Minuten-Takt statt, die Kursblockung sieht grundsätzlich für Grundkurse eine, für Leistungskurse zwei Doppelstunden vor. Der Unterrichtstag sollte nicht länger als bis 16.45 Uhr gehen.

Den im Schulprogramm ausgewiesenen Zielen, die Schüler*innen ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu bieten, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik in besonderer Weise verpflichtet.

Durch ein fachliches begleitendes Förderprogramm, das in den Vertiefungskursen der Oberstufe und in dem Projekt „Schüler helfen Schülern“ unter Einbeziehung von Schüler*innen als Tutoren umgesetzt wird, begleitet durch regelmäßige Gespräche mit den Lehrkräften und dort getroffene Lernvereinbarungen, werden Schüler*innen mit Lernschwierigkeiten intensiv unterstützt.

Schon in der 5. und 6. Klasse wird eine 5. parallele Fachunterrichtsstunde dazu genutzt, gemeinsam zu üben und Schüler*innen individuell zu fördern bzw. zu fordern.

Schüler*innen aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme an den vielfältigen Wettbewerben im Fach Mathematik angehalten und, wo erforderlich, begleitet. Schüler*innen aller Klassen- und Jahrgangsstufen nehmen alljährlich am Känguru-Wettbewerb und ähnlichen Wettbewerben teil.

In der Sekundarstufe II kann verlässlich darauf aufgebaut werden, dass die Verwendung von Kontexten im Mathematikunterricht bekannt ist.

In der Sekundarstufe I wird ein wissenschaftlicher Taschenrechner ab Klasse 7 verwendet, dynamische Geometrie-Software und Tabellenkalkulation werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt, der Umgang mit ihnen eingeübt. Dazu besitzen alle Schüler*innen ein eigenes digitales Endgerät. Zusätzlich stehen in der Schule zwei PC-Unterrichtsräume und das Selbstlernzentrum zur Verfügung. In der Sekundarstufe II kann deshalb davon ausgegangen werden, dass die Schüler*innen mit den grundlegenden Möglichkeiten dieser digitalen Werkzeuge vertraut sind.

Die Fachkonferenz Mathematik hat beschlossen, dass als grafikfähiger Taschenrechner mit CAS der Casio fx-CP400 (Classpad II) ab der Einführungsphase eingesetzt wird.

3 Entscheidungen zum Unterricht

3.1 Unterrichtsvorhaben

*Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan hat den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung einer jeden Lehrkraft, Schüler*innen Lerngelegenheiten zu ermöglichen, so dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.*

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

Im „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 3.1.1) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich für die Unterrichtsvorhaben I, II, III, IV, V und VI der Einführungsphase und für die Unterrichtsphasen der Qualifikationsphase. Die zeitliche Abfolge der Unterrichtsvorhaben der Einführungsphase ist jeweils auf die Vorgaben zur Vergleichsklausur abzustimmen. Die Inhaltsfelder der Stochastik, welche im neuen KLP der Sek I zu behandeln sind, werden in der Einführungsphase nach der Vergleichsklausur behandelt, da der neue KLP der Sek I noch nicht für die aktuellen Jahrgangsstufen der 8., 9. und 10. Klasse in Kraft getreten ist.

Das Übersichtsraster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen“ an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene konkreter Unterrichtsvorhaben Berücksichtigung finden. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Schülerinteressen oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans nur ca. 75 Prozent der zu erwartenden Bruttounterrichtszeit verplant.

Während der Fachkonferenzbeschluss zum „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechslern und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz bindend ist, besitzt die Ausweisung „konkreter Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 3.1.2) empfehlenden Charakter.

Referendar*innen sowie neuen Kolleg*innen dienen diese vor allem zur standardbezogenen Orientierung in der neuen Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen Absprachen zu didaktisch und methodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen, die im Einzelnen auch den Kapiteln 3.2 bis 3.4 zu entnehmen sind.

Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

3.1.1 Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

E-Phase		
UV	Thema	Zeit
I	E-A1: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen	12
II	E-A2: Transformationen von Funktionen und Einfluss von Parametern	12
III	E-A3: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate	18
IV	E-A4: Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen	18
V	E-G1: Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen	12
VI	E-G2: Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum	15
	Summe:	87

Grundkurse

Q1 Grundkurse		
UV	Thema	Zeit
I	Q-GK-A1: Optimierungsprobleme	13
II	Q-GK-A2: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS)	15
III	Q-GK-A3: Von der Änderungsrate zum Bestand	8
IV	Q-GK-A4: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen	12
V	Q-GK-G1: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen	7
VI	Q-GK-G2: Ebenen in Koordinaten- und Parameterform	12
VII	Q-GK-S1: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	17
	Summe:	84

Q2 Grundkurse		
UV	Thema	Zeit
VIII	Q-GK-S2: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung	10
IX	Q-GK-S3: Änderungen und Auswirkungen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen	11
X	Q-GK-A5: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion	13
XI	Q-GK-A6: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln	9
XII	Q-GK-A7: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen	11
XIII	Q-GK-G3: Untersuchungen an geometrischen Körpern	10
	Summe:	64

Leistungskurse

Q1 Leistungskurse		
UV	Thema	Zeit
I	Q-LK-A1: Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern	18
II	Q-LK-A2: Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (inklusive LGS)	20
III	Q-LK-A3: Von der Änderungsrate zum Bestand	10
IV	Q-LK-A4: Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung	18
V	Q-LK-A5: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion	15
VI	Q-LK-G1: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen	7
VII	Q-LK-G2: Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen	10
VIII	Q-LK-G3: Parametrisierung von Ebenen	8
IX	Q-LK-G4: Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten	6
X	Q-LK-S1: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	18
XI	Q-LK-S2: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung	12
Summe:		142

Q2 Leistungskurse		
UV	Thema	Zeit
XII	Q-LK-S3: Parameter und Prognosen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen	15
XIII	Q-LK-S4: Vertrauen und Verlässlichkeit – Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Konfidenzintervallen	10
XIV	Q-LK-S5: Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen	10
XV	Q-LK-A6: Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen	8
XVI	Q-LK-A7: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln	20
XVII	Q-LK-A8: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen	20
XVIII	Q-LK-G5: Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Einschluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder	10
XIX	Q-LK-G6: Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen	10
Summe:		103

3.1.2 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben Einführungsphase

Hinweis: Themen, Inhaltsfelder, inhaltliche Schwerpunkte und Kompetenzen hat die Fachkonferenz der Emmy-Noether-Gesamtschule verbindlich vereinbart.

In allen anderen Bereichen sind Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bei der Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben möglich. Darüber hinaus enthält dieser schulinterne Lehrplan in den Kapiteln 3.2 bis 3.4 übergreifende sowie z. T. auch jahrgangsbezogene Absprachen zur fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit, zur Leistungsbewertung und zur Leistungsrückmeldung. Je nach internem Steuerungsbedarf können solche Absprachen auch vorhabenbezogen vorgenommen werden.

Einführungsphase Funktionen und Analysis (A)**Thema: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen (E-A1)****Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen,
- lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel.

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):**Problemlösen***Die Schüler*innen*

- erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz.

Kommunizieren*Die Schüler*innen*

- wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
- konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte.

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Die Potenzfunktionen mit ganzrationalen Exponenten werden mithilfe des CAS untersucht und systematisiert (Verlauf, Symmetrie, besondere Punkte, Definitionsbereich und Wertebereich, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$). Dabei spielen Darstellungswechsel eine besondere Rolle. Unter Berücksichtigung von bekannten und neu eingeführten Fachbegriffen und logischen Strukturen werden Zusammenhänge erkundet und systematisiert. Die Herausforderungen der Bildungs- und Fachsprache lassen sich sprachsensibel weiterentwickeln.

Ausgehend von den Potenzfunktionen werden die ganzrationalen Funktionen definiert und mit Blick auf die Eigenschaften untersucht. Mithilfe des Graphen werden schon in diesem Unterrichtsvorhaben Monotonie und Extrempunkte fachsprachlich eingeführt und betrachtet. Im Rahmen der Nullstellenberechnung werden algebraische Rechentechniken der SI ohne Hilfsmittel wiederholt und erweitert. Verschiedene Wege zur Berechnung der Nullstellen werden verglichen und beurteilt, dabei auftretende Fehler werden analysiert. Auch die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.

Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung und Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen des CAS gerichtet werden, wobei der Fokus auf der Darstellung von Graphen inklusive Einstellungen sowie auf der Erstellung von Wertetabellen liegt.

Thema: Transformationen von Funktionen und Einfluss von Parametern (E-A2)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),
- wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter.

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):**Operieren***Die Schüler*innen*

- verwenden im Unterricht den CAS zum
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen.

Modellieren*Die Schüler*innen*

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle.

Argumentieren*Die Schüler*innen*

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können.

Der entdeckende Einstieg in das Thema Einfluss von Parametern und Transformationen mithilfe des CAS erfolgt mit einem anwendungsbezogenen Kontext (z.B. „Temperaturmittelwerte im Jahresverlauf“ oder „Sonnenscheindauer“), bei dem die aus der SI bekannte Sinusfunktion wiederholt und in Bezug auf Fachbegriffe (Amplitude, Periode) fundiert wird. Anknüpfend an eine Systematisierung der Transformationen (Verschiebung, Streckung, jeweils in Richtung beider Achsen), ausgehend von den quadratischen Funktionen (Scheitelpunktform), werden diese auf die Sinusfunktion und auf Potenzfunktionen übertragen. Dabei wird der Einfluss der Parameter auf die Eigenschaften dieser Funktionen erkundet.

Bei Transformationen ganzrationaler Funktionen werden die Auswirkungen auf die im vorherigen Unterrichtsvorhaben betrachteten Eigenschaften sowie auf Monotonie und Extrempunkte untersucht. Für algebraische Operationen und grafische Darstellungen wird in diesem Unterrichtsvorhaben zunehmend der CAS verwendet.

Thema: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A3)
Inhaltliche Schwerpunkte:

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Zu entwickelnde Kompetenzen
Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
*Die Schüler*innen*

- berechnen mittlere und lokale Änderungsrate und interpretieren sie im Sachkontext,
- erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen,
- erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)$,
- deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
- bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- beschreiben und interpretieren Änderungsrate funktional (Ableitungsfunktion),
- leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen,
- nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten.

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Operieren
*Die Schüler*innen*

- verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden.

In verschiedenen Anwendungskontexten (z.B.: Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, ...) werden durchschnittliche Änderungsrate, durchschnittliche Steigungen und anknüpfend daran Sekanten betrachtet, berechnet und im Kontext interpretiert. Dabei werden quadratische Funktionen als Weg-Zeit-Funktion bei Fall- und Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet. Neben zeitabhängigen Vorgängen soll auch eine (geometrische) Steigung im Sachzusammenhang als Kontext betrachtet werden.

Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird in den eingeführten Sachzusammenhängen vorstellungsgebunden genutzt. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Geschwindigkeit genutzt.

Der CAS wird zur numerischen und grafischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekante zur Tangente (Zoomen) eingesetzt. Hierbei wird die Limes-Schreibweise verwendet. Der Begriff der Tangente wird in Abgrenzung zu den Vorstellungen der SI problematisiert und analytisch definiert.

Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schüler*innen in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden.

Anschließend wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für geeignete einfache Funktionen werden der Grenzübergang bei der „h-Methode“ unter Verwen-

Argumentieren <i>Die Schüler*innen</i> • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, • begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,	dung der Limeschreibweise exemplarisch durchgeführt und erste Ableitungsfunktionen berechnet. Um die Ableitungsregel für höhere Potenzen zu vermuten, nutzen die Schüler*innen den CAS. Die Potenzregel für Ableitungen wird formuliert. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden. Der Unterricht erweitert besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Argumentierens. Bei innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben vertiefen die Schüler*innen abschließend ihre erworbenen Kompetenzen und berechnen Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen sowie Steigungswinkel.
---	---

Thema: Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)
Inhaltliche Schwerpunkte:

- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Zu entwickelnde Kompetenzen
Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
*Die Schüler*innen*

- berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
- bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung,
- nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
- wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln,
- unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
- verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
- beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,
- nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten,
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Operieren
*Die Schüler*innen*

- verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- verwenden im Unterricht den CAS zum ...
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Durch gleichzeitiges Visualisieren einer Ausgangsfunktion 3. Grades und der Ableitungsfunktion ergibt sich die Notwendigkeit der Summen- und Faktorregel für Ableitungen, von denen mindestens eine bewiesen wird. Gleichzeitig entdecken die Lernenden die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten der Ausgangsfunktion und der Ableitung, woran im Folgenden angeknüpft wird.

Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der vier möglichen Fälle bezogen auf das Vorzeichen an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schüler*innen üben damit, vorstellungsbezogen mithilfe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu argumentieren. Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie) argumentieren. Dieses führt auch zur Unterscheidung von lokalen und globalen Extremstellen.

Ausgehend von grafischen Darstellungen schließen sich Untersuchungen zum Krümmungsverhalten und damit die Betrachtung von Wendestellen an. Höhere Ableitungen werden auch im Rahmen von hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen genutzt. Beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen werden die erworbenen Kompetenzen vernetzt und vertieft.

○ Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern. Argumentieren <i>Die Schüler*innen</i> • begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, • verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen).	
---	--

Einführungsphase Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Thema: *Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen (E-G1)*

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren
- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
- stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
- deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen,
- berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
- addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,
- weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):**Operieren***Die Schüler*innen*

- erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum Darstellen von geometrischen Situationen im Raum.

Kommunizieren*Die Schüler*innen*

- erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, verbal-sprachlich) aus.

Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z. B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schüler*innen bereits bekannten Koordinatisierungen (kartesische Koordinaten, geographische Koordinaten, GPS, Robotersteuerung).

An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z.B. Quader) wiederholen die Schüler*innen die aus der Sekundarstufe I bekannten Schrägbilder und nutzen Geogebra, um unterschiedliche Schrägbilder darzustellen und hinsichtlich ihrer Wirkung zu beurteilen.

Parallel zur Entwicklung einer angemessenen Raumvorstellung wird auch an der Entwicklung einer adäquaten Symbolsprache gearbeitet. Die Informationen dazu (Darstellung mit Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren) kommen von der Lehrkraft und werden von den Schüler*innen im Rahmen von Aufgaben angewendet. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.

Verkettungen von Verschiebungen führen grafisch und algebraisch zur Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar.

Mithilfe von Vektoren werden Punkte und Strecken (z.B. Mittelpunkte, Schnittpunkte, Diagonalen, Streckenlängen) geometrischer Figuren in unterschiedlichen Darstellungsformen ermittelt und Eigenschaften geometrischer Figuren (Viereckstypen) und besonderer Punkte (z.B. Teilungsverhältnis) nachgewiesen. Dabei wird auch der Begriff Kollinearität eingeführt und verwendet. Die Länge einer Strecke wird mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt.

Thema: Vektoren und Geraden – Bewegung in den Raum (E-G2)
Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität
- Geraden und Strecken: Parameterform
- Lagebeziehungen von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend
- Schnittpunkte: Geraden

Zu entwickelnde Kompetenzen
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schüler*innen

- deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
- weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach,
- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
- untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
- untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
- lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte):
Problemlösen
Die Schüler*innen

- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung.

Kommunizieren
Die Schüler*innen

- erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Zunächst wird ein geometrisches Objekt in einem Sachkontext durch Vektoren beschrieben. Dabei werden wiederholend die aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 bekannten Eigenschaften und Operationen von Vektoren genutzt und vertieft, um parallele Seiten und besondere Punkte zu ermitteln. Daran anschließend werden lineare Bewegungen z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen und diskutiert werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Auch die Parametrisierung einer Strecke wird in diesem Rahmen thematisiert.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie Berechnungen sollen auch ohne Hilfsmittel durchgeführt werden.

Im Anwendungskontext (z.B. Kondensstreifen von Flugzeugen) werden Lagebeziehungen von Geraden untersucht und systematisiert. Die Untersuchung von Schnittpunkten zweier durch Geraden modellierter Flugbahnen führt dabei auf ein lineares 3×2 -Gleichungssystem. Einen Bezug zu den unterschiedlichen Lagebeziehungen können die Schüler*innen herstellen, wenn sie zugleich die auf

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none">• nehmen zu mathemathhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung. | eine Landkarte reduzierte Situation mit nur 2 Gleichungen untersuchen. Einfache lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden als Wiederholung aus der Sekundarstufe I ohne Hilfsmittel gelöst, für komplexere LGS wird der CAS verwendet. Ein algorithmisches Lösungsverfahren (z.B. der Gaußalgorithmus) wird später in der Qualifikationsphase bei den Steckbriefaufgaben eingeführt und geübt. |
|--|--|

3.1.3 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben GK Qualifikationsphase

Hinweis: Themen, Inhaltsfelder, inhaltliche Schwerpunkte und Kompetenzen hat die Fachkonferenz der Emmy-Noether-Gesamtschule verbindlich vereinbart.

In allen anderen Bereichen sind Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bei der Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben möglich. Darüber hinaus enthält dieser schulinterne Lehrplan in den Kapiteln 3.2 bis 3.4 übergreifende sowie z. T. auch jahrgangsbezogene Absprachen zur fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit, zur Leistungsbewertung und zur Leistungsrückmeldung. Je nach internem Steuerungsbedarf können solche Absprachen auch vorhabenbezogen vorgenommen werden.

Q-Phase 1 Grundkurs Funktionen und Analysis (A)**Thema:** *Optimierungsprobleme (Q-GK-A1)***Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- erläutern den Begriff der Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs,
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren***Die Schüler*innen*

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
-

Gestartet wird mit Optimierungsproblemen mit ganzrationalen Funktionen. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt. An mindestens einem Problem im Sachzusammenhang entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$. Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden.

Anschließend wird als Exkurs exemplarisch die Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs als Umkehrfunktion betrachtet.

Problemlösen*Die Schüler*innen*

- analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,

Operieren*Die Schüler*innen*

- verwenden den CAS-Rechner zum:
 - ... Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - ... Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen
 - ... Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern

Thema: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS) (Q-GK-A2)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:****Funktionen und Analysis (A): Die Schüler*innen**

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,
- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung.

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G): Die Schüler*innen

- erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,
- wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren****Die Schüler*innen**

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrien, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen finden. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden.

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen.

Anknüpfend an die Einführungsphase werden in innermathematischen Situationen und in unterschiedlichen Kontexten (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden,

- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Operieren*Die Schüler*innen*

- verwenden den CAS-Rechner zum
 - ... Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - ... zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
 - ... Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden, Berechnen und Darstellen von Funktionsscharen

Flugbahnen) ganzrationale Funktionen mit Parametern aufgestellt und mithilfe eines MMS untersucht. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Vertiefung:

Auch die Transformation der Sinus- und Kosinusfunktion kann wiederholend zur Modellierung eingesetzt werden.

Vernetzung:

In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme schwerpunktmäßig behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie ebenfalls benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt mehr bilden. Verschiedene Arten von Lösungsmengen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten wurden bereits in der EF bei den Lagebeziehungen von Geraden aufgegriffen.

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK-A3)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,
- deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
- skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,
- erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Kommunizieren***Die Schüler*innen*

- erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
- nehmen zu mathemathhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
- vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
- führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge).

Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und vergleichen eigenständig unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsumme, Ober- oder Untersumme) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen, die zur Definition des Integrals führen.

Hinweis:

Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden.

Thema: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen (Q-GK-A4)	
Inhaltliche Schwerpunkte: Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	
Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: <i>Die Schüler*innen</i> - deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung, - erläutern geometrisch-anschaulich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wenden ihn an, - nutzen vorgegebene Stammfunktionen und bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, - nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen, - ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion, - ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen. Prozessbezogene Kompetenzen: Modellieren <i>Die Schüler*innen</i> - ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, - erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, - beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Argumentieren <i>Die Schüler*innen</i> - erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, - begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, - erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise, - überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,	Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird durch geometrisch-anschauliche Überlegungen begründet und damit der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgestellt. Die Bedeutung des Hauptsatzes und seine Anwendung werden in verschiedenen Kontexten vertieft. Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen von Stammfunktionen werden für ganzrationale Funktionen von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. Die gewonnenen Erkenntnisse werden auf weitere innermathematische bzw. anwendungsorientierte Situationen übertragen, die auch Flächen zwischen Funktionsgraphen umfassen. Bei geeigneten Problemstellungen werden die Intervalladditivität und Linearität des Integrals thematisiert. Geeignete Problemstellungen werden in diesem Unterrichtsvorhaben auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Q-Phase 1 Grundkurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)**Thema:** *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (Q-GK-G1)***Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Vektoroperation: Skalarprodukt

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Argumentieren*Die Schüler*innen*

- stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist jedoch die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dieses wird am Beispiel der Kräftezerlegung (z.B. Zerlegung in vertikale und horizontale Komponenten beim Schlittenziehen) veranschaulicht.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produkts von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. Division durch einen Vektor) und vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen gestellt.

Thema: Ebenen in Koordinaten- und Parameterform (Q-GK-G2)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
- verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
- berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Problemlösen***Die Schüler*innen*

- erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ wird anknüpfend an Geradengleichungen

$a \cdot x + b \cdot y = d$ in der Ebene durch Erweitern um eine Variable eingeführt. Zur Erkundung soll eine Visualisierung mit einem MMS dienen, bei der die Achsenabschnitte $a_i = d/n_i$ (für $n_i \neq 0$) ins Spiel kommen, die in der Achsenabschnittsform $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$ auftreten. Diese Form bietet den Vorteil, eindeutig zu sein, und erlaubt es, die Lage der Ebene im Koordinatensystem zeichnerisch darzustellen.

Die Schnittpunktberechnung (Durchstoßpunkt) zwischen Geraden und Ebenen ist mit der Koordinatenform besonders einfach, wenn ein allgemeiner Punkt der Gerade (parametrisierte Punktmenge) in die Koordinatenform eingesetzt wird. Die Achsenabschnittsberechnung ordnet sich dabei als Spezialfall ein. Auch Spurgeraden in den Hauptebenen werden mit dem Einsetzungsprinzip ermittelt.

Die Notation mithilfe des in GK-G1 eingeführten Skalarproduktes $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$ führt zur Deutung von $\vec{n}$ als Normalenvektor, der senkrecht auf der Ebene steht. Der Einfluss von d , mit dem sich die Ebene parallel verschieben lässt, wird erkundet. Um eine Gleichung einer Ebene aus drei Punkten aufzustellen, soll dies dem Prinzip einer Steckbriefaufgabe folgend (vgl. GK-A2) mit einem 3x3-Gleichungssystem durch Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ erfolgen, wobei d als Parameter im MMS mitläuft oder $d = 1$ (in Sonderfällen $d = 0$) gesetzt werden kann.

Als Kontext für die anschließend zu thematisierende Parameterform einer Ebene dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G1 wieder aufgegriffen und

Argumentieren*Die Schüler*innen*

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),

Kommunizieren*Die Schüler*innen*

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
- beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Der Übergang zur Koordinatenform erfolgt als Alternative zum „Steckbriefverfahren“ auch durch die Bestimmung eines Normalenvektors mithilfe eines unterbestimmten 2x3-Gleichungssystems. Ein explizites Arbeiten mit der Normalenform soll aber nur im Rahmen einer Differenzierung erfolgen.

Der umgekehrte Übergang von der Koordinatenform zur Parameterform kann über drei Punkte (z.B. die Achsenabschnitte) bewerkstelligt werden, oder indem zwei (zu $\vec{n}$ orthogonale) Spannvektoren der Ebene aus Gleichungen des Typs

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ gewonnen werden.}$$

Vernetzung:

Ein systematisches Verfahren, lineare Gleichungssysteme auch hilfsmittelfrei in einfachen Fällen zu lösen, wurde bereits im Unterrichtsvorhaben GK-A2 eingeführt. Um hier Möglichkeiten des weiteren Übens und Wiederholens zu schaffen, können Durchstoßpunkte alternativ mit Ebenen in Parameterform in einfachen Fällen berechnet werden. Des Weiteren führt die Punktprobe bei Ebenen in Parameterform auf ein 3x2-Gleichungssystem.

Vertiefung:

Ein Normalenvektor kann mit einem MMS auch mithilfe des Vektorprodukts berechnet werden.

Q-Phase 1 Grundkurs Stochastik (S)

Thema: *Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Q-GK-S1)*

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
- verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- bestimmen das Gegenereignis $\bar{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
- lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
- bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- führen Darstellungswechsel sicher aus,
- verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (CAS) zum:
... Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,

Modellieren*Die Schüler*innen*

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten, wie Zufallsantworten bei sensiblen Fragen und Diagnostiktests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).

Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet.

Hinweis:

Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

Q-Phase 2 Grundkurs Stochastik (S)**Thema:** *Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung (Q-GK-S2)***Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren***Die Schüler*innen*

- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Problemlösen*Die Schüler*innen*

- erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementäreignissen möglich.

Vernetzung:

Werkzeuge zur Problemlösung aus,	Das Summenzeichen wird als Schreibweise bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung wieder aufgegriffen.
----------------------------------	--

Thema: Änderungen und Auswirkungen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-GK-S3)
Inhaltliche Schwerpunkte:

- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Zu entwickelnde Kompetenzen
Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schüler*innen

- bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,
- erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,
- nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen,
- interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit.

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schüler*innen

- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k , p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit wird bewusst als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit interpretiert. Die Genauigkeit dieser Schätzung steigt mit dem Stichprobenumfang.

Vertiefung:

In einem Sachkontext wird das Konzept der σ -Umgebungen exemplarisch behandelt.

Q-Phase 2 Grundkurs Funktionen und Analysis (A)**Thema:** *Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (Q-GK-A5)***Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$),
- verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren***Die Schüler*innen*

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter der a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer wiederholenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand.

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Operieren*Die Schüler*innen*

- verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- führen Darstellungswechsel sicher aus,
- verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (CAS) zum
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Thema: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (G-GK-A6)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an,
- wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an,
- nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Argumentieren*Die Schüler*innen*

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,

In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produktregel und Spezialfall der Kettenregel für Verknüpfungen von Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen) hergeleitet. Dazu können zunächst Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Vorgelegte Argumentationsketten werden erläutert, beurteilt und für den Beweis der Produktregel genutzt. Die Kettenregel für Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen im Exponenten kann graphisch mithilfe der bekannten Zusammenhänge beim Transformieren von Funktionsgraphen entdeckt werden.

Mithilfe der neu gewonnen Ableitungsregeln werden schließlich in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen betrachtet und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben verwendet. Dabei ist es mithilfe eines MMS oder mithilfe von vorgegebenen Ableitungen auch möglich, weitere Verkettungen von ganzrationalen Funktionen mit Exponentialfunktionen zu betrachten. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">• nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),• verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),• erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,• beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind, | |
|---|--|

Thema: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (G-GK-A7)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an,
- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung,
- nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge,
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Im letzten Unterrichtsvorhaben zur Analysis werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs...), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. Integrale von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen können in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet werden.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) untersucht, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen abgeleitet und mit anderen Funktionen verknüpft werden.

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none">• verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,• verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (CAS) zum<ul style="list-style-type: none">– Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,– zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,– Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,– Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,– Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern, <p>Problemlösen
<i>Die Schüler*innen</i></p> <ul style="list-style-type: none">• stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,• analysieren und strukturieren die Problemsituation,• wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, | |
|--|--|

Q-Phase 2 Grundkurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)**Thema:** *Untersuchungen an geometrischen Körpern (G-GK-G3)***Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
- verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
- berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
- nutzen Symmetriebetrachtungen in geometrischen Objekten zur Lösung von Problemstellungen und spiegeln Punkte an Ebenen in einfachen Fällen,
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren***Die Schüler*innen*

- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Geometrische Körper wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen, können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere die Grundebenen, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) werfen die Frage auf, wie sich Spiegelungen an Ebenen durchführen lassen. In einfachen Fällen, in denen der Normalenvektor in Richtung einer Koordinatenachse weist, werden die Koordinaten eines an der Ebene gespiegelten Punktes ermittelt. Der Nachweis der Symmetrie zu einer gegebenen Ebene wird durch einen Vergleich des Normalenvektors mit dem Verbindungsvektor zwischen Punkt und Spiegelpunkt geführt, wobei zusätzlich eine Punktprobe nötig ist, um zu zeigen, dass der Mittelpunkt in der Ebene liegt.

Winkel lassen sich zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmen. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.

Vernetzung:

Kommunizieren <i>Die Schüler*innen</i> • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, • wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, • dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,	Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder auf. Vertiefung: Die Bestimmung von Winkeln zwischen Geraden und Ebenen oder zwei Ebenen lässt Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung zu. Dadurch lässt sich ein im Unterrichtsvorhaben E-G2 begonnenes Thema ausbauen.
--	--

3.1.4 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben LK Qualifikationsphase

Hinweis: Themen, Inhaltsfelder, inhaltliche Schwerpunkte und Kompetenzen hat die Fachkonferenz der Emmy-Noether-Gesamtschule verbindlich vereinbart.

In allen anderen Bereichen sind Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bei der Konkretisierung der Unterrichtsvorhaben möglich. Darüber hinaus enthält dieser schulinterne Lehrplan in den Kapiteln 3.2 bis 3.4 übergreifende sowie z. T. auch jahrgangsbezogene Absprachen zur fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit, zur Leistungsbewertung und zur Leistungsrückmeldung. Je nach internem Steuerungsbedarf können solche Absprachen auch vorhabenbezogen vorgenommen werden

Q-Phase 1 Leistungskurs Funktionen und Analysis (A)**Thema:** *Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern (Q-LK-A1)***Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- lösen biquadratische Gleichungen auch ohne Hilfsmittel,
- führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,
- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren***Die Schüler*innen*

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Zur Reaktivierung der Vorkenntnisse der Differentialrechnung werden Funktionen vierten Grades untersucht. Dies umfasst insbesondere das hilfsmittelfreie Lösen von biquadratischen Gleichungen.

Anschließend werden zunächst Optimierungsprobleme mit ganzrationalen Funktionen ohne Parameter betrachtet. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (noch ohne die Produkt- oder Kettenregel). Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden, ohne dass Ableitungen hilfsmittelfrei gebildet werden müssen (z.B. „Zylinder in einer Kugel“). Anschließend werden Optimierungsprobleme bei Funktionen mit Parametern

vor, • übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, • beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, • reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, • benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, Problemlösen <i>Die Schüler*innen</i> • analysieren und strukturieren die Problemsituation, • wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), • setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, • berücksichtigen einschränkende Bedingungen, • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Argumentieren <i>Die Schüler*innen</i> • begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, • entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten, • nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch), • verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen), • beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,	betrachtet. Hier kann z.B. auch das Problem der offenen Schachtel wieder aufgegriffen werden, indem nicht von einem Papier mit festen Maßen ausgegangen wird, sondern nur ein Seitenverhältnis der Papierseiten vorgegeben wird oder die Länge einer Seite offenbleibt, sodass bei der Zielfunktion eine Parameterabhängigkeit entsteht. Mit vorgegebenen ganzrationalen Funktionen mit Parametern (Funktionsscharen) werden anknüpfend innermathematische Situationen (Funktionsscharen) und anwendungsbezogene Kontexte mit Parametern (z.B. Brücken, Gebäude, Flugbahnen) untersucht, bei denen Extrempunkte eine Rolle spielen. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.
--	--

Thema: Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (inklusive LGS) (Q-LK-A2)
Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Zu entwickelnde Kompetenzen
Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Funktionen und Analysis (A): Die Schüler*innen

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen.

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G): Die Schüler*innen

- erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,
- wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind,
- interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen.

Prozessbezogene Kompetenzen:
Operieren
Die Schüler*innen

- wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrie, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden.

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen. Über freie Parameter (in Lösungen aus unterbestimmten Gleichungssystemen) können Funktionsscharen erzeugt und damit ein Rückbezug

Arbeit mit mathematischen Objekten, • nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, • verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen, • nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, • verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (CAS) zum ... Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, ... zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen, ... Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, • reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge, Kommunizieren <i>Die Schüler*innen</i> • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren, • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,	zum Unterrichtsvorhaben LK-A1 hergestellt werden. Anschließend werden mithilfe von Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechenden Kosinusfunktionen periodische Situationen (z.B. Sonnenscheindauer im Jahresverlauf) wiederholend modelliert. Dabei sollen die einzelnen Parameter mit und ohne MMS bestimmt werden. Hinweise: Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig zur Spline-Interpolation forschen und referieren zu lassen. Vernetzung: In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahren und mögliche Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme (leere Menge, eindeutige Lösung oder unendlich viele Lösungen) schwerpunktmäßig behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie erneut benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt mehr bilden. Verschiedene Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme werden bei den Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen wieder aufgegriffen und geometrisch gedeutet (leere Menge, Punkt, Gerade, Ebene).
---	--

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-LK-A3)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,
- deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
- skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion,
- erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Kommunizieren***Die Schüler*innen*

- erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
- nehmen zu mathemathhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
- führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Rekonstruktion einer Größe (z.B. physikalische Arbeit) thematisiert, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt.

Der Einstieg sollte über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsummen) zur möglichst genauen näherungsweise Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit werden immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit dem Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt

Problemlösen*Die Schüler*innen*

- wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,

Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Aus den übereinstimmenden Grenzwerten von Ober- und Untersummen ergibt sich die Definition des Integrals.

Hinweise:

Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden.

Thema: Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (Q-LK-A4)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung,
- deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
- begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs und wenden den Hauptsatz an,
- bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen und verwenden die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \mapsto \frac{1}{x}$,
- nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen,
- ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion,
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird anschaulich, kontextgebunden und numerisch begründet.

Um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch tiefergehend zu begründen, wird der absolute Zuwachs $I_a(x+h) - I_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. In diesem Rahmen werden auch die Intervall-additivität und Linearität des Integrals formal gefasst.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen für Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet. Dabei finden sie auch heraus, dass dies nicht in jedem Fall möglich ist und es Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{x}$ gibt, für deren Stammfunktionen noch kein Funktionsterm zur Verfügung steht.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden für die Berechnung von Flächen zwischen Funktionsgraphen genutzt und auf weitere zunehmend komplexe innermathematische und anwendungsorientierte Situationen übertragen. Geeignete Problemstellungen werden auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

- führen Darstellungswechsel sicher aus,
- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (CAS) zum ... ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,

Problemlösen*Die Schüler*innen*

- stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
- analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Thema: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (Q-LK-A5)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$),
- verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren***Die Schüler*innen*

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS kann das Verhalten des Differenzenquotienten für immer kleinere h betrachtet werden. Durch Variation der Stelle der Ableitung entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand (Differentialgleichung).

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse und Wachstumsprozesse mit Parametern (Funktionsscharen) betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und die Grenzen der Modelle sind der

Operieren*Die Schüler*innen*

- recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum
 - ... zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - ... Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - ... Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Q-Phase 1 Leistungskurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)**Thema:** *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (Q-LK-G1)***Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Vektoroperation: Skalarprodukt

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Problemlösen***Die Schüler*innen*

- erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,

Operieren*Die Schüler*innen*

- verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung zunächst eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont, der später zum Verständnis der Abstandsmessung zwischen Punkten und Ebenen genutzt werden kann.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Am Beispiel der physikalischen Arbeit wird das geometrische Verständnis des Skalarprodukts veranschaulicht.

Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die besonderen formalen Eigenschaften des Skalarprodukts sowie die dafür gültigen Rechengesetze werden im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. keine Division durch einen Vektor, kein Satz vom Nullprodukt) sowie vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen thematisiert.

Vertiefung:

Im Rahmen eines arbeitsteiligen Vorgehens kann ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt dahinterliegende elementargeometrische Sätze transparent machen wie z.B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ und

	$\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ für die Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eines Parallelogramms. Ein ähnliches Vorgehen ist beim Beweis des Satzes des Thales möglich. Im Sinne der Wissenschaftspropädeutik ist neben einem Einblick in die Möglichkeit einer axiomatischen Festlegung eines Skalarproduktes durch seine algebraischen Eigenschaften wichtig, dass durch ein Skalarprodukt zugleich Längen- als auch Winkelmessung in einem Vektorraum ermöglicht werden.
--	--

Thema: Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen (Q-LK-G2)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen,
- berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Argumentieren***Die Schüler*innen*

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kommunizieren*Die Schüler*innen*

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend kom-

Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an das Unterrichtsvorhaben LK-G1 anknüpfender Weg vorgeschlagen: Betrachtet wird die als Punkt-Normalenform bekannte Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen wie $\vec{a} = \vec{0}$ wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Die Schnittmenge zweier Ebenen wird durch Lösung eines linearen 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Dabei müssen die Lernenden eine nicht leere Lösungsmenge selbstständig parametrisieren und als Schnittgerade identifizieren.

Zur Klärung der Parallelität von Geraden und Ebenen oder Ebenen untereinander werden Normalenvektoren herangezogen. Über die Normalenvektoren wird die Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren auch auf Ebenen übertragen.

Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform¹ als Sonderformen der Normalenform) werden in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse.

Die Hesse-Normalenform¹ erlaubt es, Abstände eines Punktes von der Ebene sowie Abstände zwischen parallelen Ebenen direkt abzulesen. Dabei wird eine Verknüpfung zur Grundvorstellung der Projektion (LK-G1) hergestellt. Verfahrenstechnisch macht es keinen Unterschied, ob es sich nun um den Abstand eines Punktes, einer parallelen Geraden oder einer parallelen Ebene von einer

¹ Die Hesse-Normalenform gehört nicht zur Obligatorik des KLP und ist damit nicht verpflichtend. Aus didaktischen Gründen wurde sie für diesen Zugang in diesem Plan vertiefend integriert.

plexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, • erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind, • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege.	Ebene handelt. Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Die Achsenabschnittsberechnung ist dabei nur ein Spezialfall der besonders einfachen Schnittmengenberechnung zwischen Geraden und Ebenen (Durchstoßpunkt) in Koordinatenform. Einen verständnisorientierten Zugang zur Abstandsberechnung zwischen einem Punkt und einer Ebene bietet das Lotfußpunktverfahren, das auch auf weitere Abstandsprobleme (vgl. LK-G4) übertragen werden kann. Vernetzung: Die Gleichungen eines linearen 2×3- oder 3×3-Gleichungssystems (LK-A2) können als Koordinatengleichungen interpretiert werden, so dass die Lösungsmenge des LGS als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden kann. Ihre Dimension lässt sich aus der Lagebeziehung der Ebenen erkennen. Dabei wird deutlich, wie weit die Normalenvektoren die Lagebeziehungen zwischen 2 oder 3 Ebenen bestimmen.
---	--

Thema: Parametrisierung von Ebenen (Q-LK-G3)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Lineare Gleichungssysteme

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- stellen Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind,
- interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
- verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (CAS) zum ... lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, ... darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. Als Einstiegskontext dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs der Parameter werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben.

Die Berechnung von Schnittmengen zwischen Ebenen und Geraden ist sowohl über ein 3x3-LGS möglich, wenn beide in Parameterform vorliegen, als auch durch Einsetzen einer Geradengleichung in eine Koordinatengleichung. Für einen Wechsel zwischen Parameterform und Koordinatenform einer Ebene wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Die Entscheidung über Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden kann direkt mit der Schnittmengenberechnung verknüpft werden.

Vernetzung:

Der Unterricht wird durch den Einsatz eines MMS bei der Lösung linearer Gleichungssysteme entlastet. Es ist jedoch sinnvoll, numerisch einfache Fälle auch hilfsmittelfrei zu bearbeiten, um die bereits im Unterrichtsvorhaben LK-A2 erworbenen Kompetenzen zu reaktivieren und zu festigen.

Vertiefung:

Die Bestimmung eines Normalenvektors mit Hilfe des Vektorproduktes ist nicht primär wegen der technischen Einfachheit gewinnbringend, sondern weil die Entwicklung einer tragfähigen geometrischen Vorstellung des Vektorproduktes sowie eine Beschreibung seiner algebraischen Eigenschaften den im Unterrichtsvorhaben LK-G1 für das Skalarprodukt beschrittenen Weg weiterverfolgt und auch eine hohe Relevanz für den Physikunterricht besitzt.

Kommunizieren*Die Schüler*innen*

- beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Vertiefend kann das Vektorprodukt für die Flächenberechnung bei Parallelogrammen und Dreiecken sowie für die Volumenberechnung beim Spatprodukt eingesetzt werden.

Die Berechnung von Schnittmengen zwischen zwei Ebenen kann besonders einfach mit einer Gleichung erfolgen, wenn eine Ebene in Koordinaten- und eine in Parameterform gegeben ist.

Vertiefend kann die Parallelität zwischen einer Ebene und einer Geraden durch die lineare Abhängigkeit des Richtungsvektors der Geraden von den Spanvektoren der Ebene beschrieben werden (Komplanarität).

Thema: Abstandsprobleme bei gradlinig bewegten Objekten (Q-LK-G4)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren***Die Schüler*innen*

- treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Problemlösen*Die Schüler*innen*

- stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Die Abstandsbestimmung erweitert sowohl die Beschreibung von Lagebeziehungen als auch die Schnittmengenproblematik. Bei Ebenen wurden Abstandsbestimmungen bereits im Unterrichtsvorhaben LK-G2 mit der Hesse-Normalenform behandelt.

Am Beispiel des Vorbeifluges eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u.a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen, insbesondere ein Lösungsweg mit den Mitteln der Analysis. Die Mittel der Analysis lassen sich auch nutzen, um im Anschluss den minimalen Abstand zweier Flugobjekte mithilfe eines MMS zu bestimmen.

Im Unterschied dazu knüpft die Abstandsberechnung von Flugbahnen an die Untersuchung von Lagebeziehungen von Geraden aus dem Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Ihre Berechnung kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten - insbesondere unter Einschluss von Hilfsebenen - genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nicht.

Vernetzung:

Das Unterrichtsvorhaben knüpft sehr eng an das Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Insbesondere ist eine integrierende Wiederholung der Lagebeziehungen von Geraden und ihrer Bestimmung vorzusehen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung (E-A4) bietet sich durchgehend an und sollte unter der Maxime einer möglichst großen Lösungsvielfalt und als Chance zur Binnendifferenzierung nicht fehlen.

Q-Phase 1 Leistungskurs Stochastik (S)**Thema:** *Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Q-LK-S1)***Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
- verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- bestimmen das Gegenereignis $\bar{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
- lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
- bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS (Nutzung des Zufallsgenerators) – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren***Die Schüler*innen*

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Problemlösen*Die Schüler*innen*

- analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten

$P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten wie Zufallsantworten bei sensiblen Fragen und Diagnostiktests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).

Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet.

Hinweis:

Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

Thema: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung (Q-LK-S2)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ -Regeln

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,
- erklären die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten und berechnen diesen in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Modellieren*Die Schüler*innen*

- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Ausgehend von der kombinatorischen Bedeutung wird der Binomialkoeffizient im Folgenden in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel berechnet. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zu-

• reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, • benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,	gänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich. Vernetzung: Das Summenzeichen wird als Schreibweise bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung wieder aufgegriffen.
--	--

Q-Phase 2 Leistungskurs Stochastik (S)

Thema: *Parameter und Prognosen – Untersuchung charakteristischer Größen und Binomialverteilungen (Q-LK-S3)*

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ -Regeln
- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,
- erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,
- nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen,
- ermitteln mit Hilfe der σ -Regeln Prognoseintervalle für die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Stichprobe und interpretieren diese im Sachkontext.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Problemlösen***Die Schüler*innen*

- wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k , p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Das Konzept der σ -Umgebungen wird durch die Untersuchung von Binomialverteilungen mit verschiedenen n und p entwickelt. Die σ -Regeln werden benutzt, um Prognoseintervalle für unterschiedliche Sicherheitswahrscheinlichkeiten zu ermitteln und im Sachzusammenhang zu interpretieren.

Am Ende dieses Unterrichtsvorhabens bietet sich die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen Stichprobenumfang und der Länge des Prognoseintervalls

Werkzeuge zur Problemlösung aus, Operieren <i>Die Schüler*innen</i> • verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, • führen Darstellungswechsel sicher aus, • nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, • verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (CAS) zum ... ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, ... variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, ... berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen,	zu untersuchen und durch eine Visualisierung mithilfe eines MMS das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu veranschaulichen.
--	--

Thema: Vertrauen und Verlässlichkeit – Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Konfidenzintervallen (Q-LK-S4)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit,
- ermitteln auf Grundlage einer relativen Häufigkeit ein Konfidenzintervall für den Parameter p einer binomialverteilten Zufallsgröße und interpretieren das Ergebnis im Sachkontext (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit),
- schätzen den für ein Konfidenzintervall vorgegebener Länge erforderlichen Stichprobenumfang ab.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- führen Darstellungswechsel sicher aus,
- führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (CAS) zum ... Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, ... variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, ... berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen, ... berechnen der Grenzen von Konfidenzintervallen im Leistungskurs,
- reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Argumentieren*Die Schüler*innen*

- erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Ausgehend von der Modellierung einer Sachsituation (z.B. Wahrscheinlichkeit von Retouren im Onlinehandel; Glücksrad auf einer schiefen Ebene; Eichgewicht bei Lebensmittelverpackungen) mit einer Binomial-verteilung, deren Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt ist, stellt sich die Frage nach der Schätzung der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit. Eine erste Annäherung erfolgt durch die Punktschätzung der relativen Häufigkeit in einer Stichprobe (Rückschluss auf die Gesamtheit).

Um zu einer Intervallschätzung zu kommen, werden zunächst mithilfe eines MMS von der Trefferwahrscheinlichkeit p abhängige 95%-Prognoseintervalle in einem Ellipsendiagramm dargestellt, deren Randfunktionen durch $h_{\pm}$ mit

$$h_{\pm}(p) = p \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

beschrieben werden.

Mithilfe dieser Darstellung kann für eine relative Häufigkeit in einer Stichprobe ein Intervall von Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, das mit dieser Stichprobe „verträglich“ ist. Dieses Intervall wird als Konfidenzintervall bezeichnet (Rückschluss auf die Gesamtheit). Um Konfidenzintervalle für andere relative Häufigkeiten, Sicherheitswahrscheinlichkeiten (Konfidenzniveaus) und Stichprobengrößen zu ermitteln, werden die Grenzen von Konfidenzintervallen auch rechnerisch mithilfe eines MMS bestimmt.

Gegen Ende des Unterrichtsvorhabens wird auch die Mindestgröße n einer Stichprobe zu einer vorgegebenen Länge eines Konfidenzintervalls abgeschätzt.

Sätze sowie sachlogische Argumente, • beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit, • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,	
--	--

Thema: Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen (Q-LK-S5)
Inhaltliche Schwerpunkte:

- Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve“), Parameter μ und σ , Graph der Verteilungsfunktion

Zu entwickelnde Kompetenzen
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
*Die Schüler*innen*

- unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion,
- untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,
- beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve“).

Prozessbezogene Kompetenzen:
Problemlösen
*Die Schüler*innen*

- wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Modellieren
*Die Schüler*innen*

- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dazu bietet sich an, zunächst mit einem MMS die Häufigkeiten der Augensummen von zwei, drei, vier... Würfeln zu simulieren, wobei in der graphischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich des Mittelwerts und der Standardabweichung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang, beispielsweise bei der Untersuchung des Abstandes der Wurfteffer zum Mittelpunkt einer Dartscheibe oder der Länge zufällig ausgewählter Schrauben.

Hervorzuheben ist im Unterricht, dass es sich bei Normalverteilungen um Wahrscheinlichkeitsverteilungen von stetigen Zufallsgrößen handelt, im Unterschied zu den bislang behandelten diskreten Zufallsgrößen.

Da auf dem MMS (und auch auf dem WTR) Normalverteilungen einprogrammiert sind, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. LK-A3).

Die Visualisierung und Berechnung von Flächen bzw. Wahrscheinlichkeiten erfolgt mithilfe eines MMS.

Der Einsatz des MMS wird zum Anlass genommen, festzustellen, dass es sich

verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,	bei der Dichtefunktion einer Normalverteilung („Gauß’sche Glockenkurve“) um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion („Gauß’sche Integralfunktion“) kein Term angegeben werden kann. Vernetzung: Zur Vernetzung mit Aspekten der Analysis (Grenzwertbetrachtung, Integralrechnung) bietet sich der Bezug zu uneigentlichen Integralen an.
--	--

Q-Phase 2 Leistungskurs Funktionen und Analysis (A)**Thema:** Umkehrbarkeit von Umkehrfunktionen (Q-LK-A6)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Zu entwickelnde Kompetenzen**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen****Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- untersuchen ausgewählte Funktionen, insbesondere die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion, auf Umkehrbarkeit und ermitteln in einfachen Fällen einen Funktionsterm der Umkehrfunktion unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich,
- erläutern den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen seiner Umkehrfunktion,
- bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen und verwenden die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- führen Darstellungswechsel sicher aus,
- erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,

Anknüpfend an das vorherige Unterrichtsvorhaben (Übergang von $a \cdot q^x$ zu $a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ und Umkehrung der Fragestellung bei Wachstumsprozessen wird der Logarithmus nun nicht nur als Operator, sondern als (Umkehr-) Funktion betrachtet. Die Umkehrbarkeit von Funktionen wird ausgehend von graphischen Darstellungen und jeweils variierenden Definitionsbereichen am Beispiel der natürlichen Exponential- / Logarithmusfunktion und an anderen passenden Funktionen (z.B. Potenz- / Wurzelfunktionen) sowie Transformationen von diesen thematisiert. In einfachen Fällen werden Funktionsterme von Umkehrfunktionen dabei hilfsmittelfrei ermittelt. Der Zusammenhang zwischen den Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion wird unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich als Symmetrie zur Winkelhalbierenden erkannt.

Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird innermathematisch über den graphischen Zusammenhang zur natürlichen Exponentialfunktion (Winkelhalbierende als Symmetrieachse) und aus der Steigung einer gespiegelten Tangente hergeleitet. Damit wird der natürliche Logarithmus als Stammfunktion der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ identifiziert.

Vertiefung:

Der Einfluss des Definitionsbereichs auf die Umkehrbarkeit kann gut am Beispiel der Sinus- und der Kosinusfunktion betrachtet werden.

Argumentieren*Die Schüler*innen*

- stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
- verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),

Thema: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (Q-LK-A7)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,
- deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen,
- nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) hergeleitet. Die Vorstellung des Ableitens als lokale lineare Approximation wird dabei mithilfe eines MMS aufgegriffen. Die Ableitungsregeln können zunächst als Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen bzw. für einfache Verkettungen (z.B. Potenz einer ganzrationalen Funktion) aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Mindestens eine der neuen Ableitungsregeln soll bewiesen werden. An dieser Stelle sind Differenzierungen z.B. durch Einsatz eines Beweispuzzles oder Beurteilungen von vorgelegten Argumentationsketten möglich.

Mithilfe der neu gewonnenen Ableitungsregeln werden schließlich zusammengesetzte Funktionen (auch mit Exponentialfunktionen und Sinus- / Kosinusfunktionen) untersucht und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben eingesetzt. Dabei werden auch Funktionsscharen betrachtet. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Hinweis:

Die lineare Approximation stellt eine Möglichkeit dar, die Beweise der Ableitungsregeln fachlich korrekt und einsichtig zu notieren.

- führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Kommunizieren*Die Schüler*innen*

- erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,

Thema: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (Q-LK-A8)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,
- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung,
- nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge,
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen,
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen sowie mithilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen.

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Im letzten Unterrichtsvorhaben zur Analysis werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Anhand der Volumina von Körpern (einfache geometrische Grundkörper, Gefäße, Zeppelin, ...), die sich durch Rotation eines Graphen um die x-Achse beschreiben lassen, werden verschiedene Aspekte der Differential- und Integralrechnung vernetzt und vertieft:

- Aufstellen der Randfunktion mit Definitionsbereich (Vernetzung mit Steckbriefaufgaben)
- Integralvorstellung (Kreisscheiben, Grenzwertprozess)
- Nachweis / Bildung von Stammfunktionen
- Berechnung von bestimmten Integralen

Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs...), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. In geeigneten Kontexten werden uneigentliche Integrale als Grenzwert der jeweils zugehörigen Integralfunktion eingeführt und bestimmt.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren***Die Schüler*innen*

- übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Problemlösen*Die Schüler*innen*

- analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Operieren*Die Schüler*innen*

- übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum
 - ... lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - ... zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - ... erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - ... ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
 - ... ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,
- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
- reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) betrachtet, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen mit anderen Funktionen verknüpft werden. Integrale von zusammengesetzten Funktionen, Exponentialfunktionen und Sinusfunktionen werden in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet.

Vertiefung:

Bei der Betrachtung von Rotationskörpern bieten Hohlkörper und der Torus (z.B. Fahrradschlauch) einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Vernetzung:

Kenntnisse über uneigentliche Integrale ermöglichen ein vertieftes Verständnis der Normalverteilung und ihrer Verteilungsfunktion.

Q-Phase 2 Leistungskurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Thema: Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Einschluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder (Q-LK-G5)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:***Die Schüler*innen*

- stellen Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
- führen Spiegelungen an Ebenen durch,
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen:**Operieren***Die Schüler*innen*

- nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum ... lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, ... darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Geometrische Körper, wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder, bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere eine Grundebene, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Durch Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) wird die Frage nach einer systematischen Untersuchung von Spiegelungen an Ebenen evoziert. Dabei wird das Verfahren der Lotfußpunktbestimmung mit Hilfe eines Normalenvektors (LK-G2) wiederaufgegriffen, wobei in der Spiegelungsebene die Schattenbilder erneut auftreten.

Abstandsbestimmungen von Punkten zu Geraden (LK-G4) und zu Ebenen (LK-G2) ermöglichen es, die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen.

Im Rahmen der Untersuchung geometrischer Körper werden Winkel zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmt. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Die Parameterform von Ebenen hat ihren Einsatz vor allem da, wo es um die Frage geht, ob ein Durchstoßpunkt einer Geraden (z.B. ein Lotfußpunkt, Schattenpunkt) eine bestimmte Fläche trifft oder außerhalb dieser liegt.

- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Kommunizieren

*Die Schüler*innen*

- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
- konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
- vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Dokumentation von Lösungswegen gelegt.

Vernetzung:

Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem UV E-G1 wieder auf.

Beim Berechnen von Flächen und Volumina werden, wo möglich, auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt. Vertiefend ist hier auch der Einsatz des Vektorproduktes (vgl. LK-G3) möglich.

Vertiefung:

Virtuelle Landschaften mit Lichteffekten können im Rahmen einer begrenzten Projektarbeit/Facharbeit mit räumlicher Geometriesoftware gestaltet werden. In einem Kaleidoskop können Spiegelungen verkettet werden und so auch Drehsymmetrien erzeugt werden.

Ein MMS bietet die Möglichkeit, vertiefend das Spatprodukt bzw. die Determinante als Kontrollgröße für Volumina kennenzulernen, ohne die dahinterliegenden algebraischen Strukturen offenzulegen. Auch über die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren und speziell über den Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden können damit Aussagen gemacht werden, die ein tiefergehendes geometrisches Verständnis unterstützen.

Thema: Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen (Q-LK-G6)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Verknüpfung aller Bereiche

Zu entwickelnde Kompetenzen**Inhaltsbezogene Kompetenzen:**

Integrierende Wiederholung aller Kompetenzen des Inhaltsfeldes

Prozessbezogene Kompetenzen:**Modellieren**

*Die Schüler*innen*

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Argumentieren

*Die Schüler*innen*

- begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
- ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
- beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,

Problemlösen

*Die Schüler*innen*

- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,

Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Schülerinnen und Schülern prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösungen mit prozessbezogenen Zielen zu verbunden:

1) eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, 2) geometrische Hilfsobjekte einzuführen, 3) an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, 4) bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, 5) unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt zu vergleichen.

Bei der Durchführung der Lösungswege können die Schülerinnen und Schüler auf das entlastende Werkzeug MMS zurückgreifen und dessen Grenzen ausloten. Bei aufwendigeren Problemen soll dieser Teil der Lösung bewusst ausgeklammert werden.

Die erworbenen Kompetenzen im Problemlösen sollen auch in Aufgaben zum Einsatz kommen, die einen Kontextbezug enthalten, so dass dieses Unterrichtsvorhaben auch unmittelbar auf das Abitur vorbereitet.

Vertiefung:

Bei Beweisaufgaben, in denen die prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens und Problemlösens zusammengeführt werden müssen, sollen die Schülerinnen und Schüler auch Formalisierungen in Vektorschreibweise rezipieren und z.T. selbst vornehmen.

3.2 Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit

In Absprache mit der Lehrerkonferenz sowie unter Berücksichtigung des Schulprogramms hat die Fachkonferenz Mathematik die folgenden fachmethodischen und fachdidaktischen Grundsätze beschlossen.

In diesem Zusammenhang beziehen sich die Grundsätze 1 bis 15 auf fächerübergreifende Aspekte, die auch Gegenstand der Qualitätsanalyse sind, die Grundsätze 16 bis 26 sind fachspezifisch angelegt.

Überfachliche Grundsätze:

1. Geeignete Problemstellungen zeichnen die Ziele des Unterrichts vor und bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
2. Inhalt und Anforderungsniveau des Unterrichts entsprechen den Vorgaben des Kernlehrplans Mathematik Sek. II und den Vorgaben des Zentralabiturs NRW.
3. Die Unterrichtsgestaltung ist auf die Ziele und Inhalte abgestimmt.
4. Medien und Arbeitsmittel sind schülernah gewählt.
5. Die Schüler*innen haben die Pflicht zur regelmäßigen Mitarbeit im Unterricht, sorgfältigen Anfertigung von Hausaufgaben, der Führung eines Portfolios (als Wissensspeicher), die intensive Nachbereitung des Unterrichts zur kritischen Selbstreflexion des individuellen Lernprozesses.
6. Der Unterricht fördert eine aktive Teilnahme der Schüler*innen, er fordert sie aber auch.
7. Der Unterricht fördert die Zusammenarbeit zwischen den Schülern*innen und bietet ihnen Möglichkeiten zu eigenen Lösungen.
8. Der Unterricht berücksichtigt die individuellen Lernwege der einzelnen Schüler*innen.
9. Die Schüler*innen erhalten immer wieder, Gelegenheit zu selbstständiger Arbeit und werden dabei unterstützt.
10. Der Unterricht fördert Stellen strukturierte und funktionale Partner- bzw. Gruppenarbeit.
11. Der Unterricht fördert strukturierte und funktionale Arbeit im Plenum.
12. Die Lernumgebung ist vorbereitet; der Ordnungsrahmen wird eingehalten.
13. Die Lehr- und Lernzeit wird intensiv für Unterrichtszwecke genutzt.
14. Es wird versucht, ein positives pädagogisches Unterrichtsklima im Unterricht zu erzeugen.
15. Wertschätzende Rückmeldungen prägen die Bewertungskultur und den Umgang mit Schüler*innen.

Fachliche Grundsätze:

1. Im Unterricht werden fehlerhafte Schüler*innenbeiträge produktiv im Sinne einer Förderung des Lernfortschritts der gesamten Lerngruppe aufgenommen.
2. Der Unterricht ermutigt die Schüler*innen dazu, auch fachlich unvollständige Gedanken zu äußern und zur Diskussion zu stellen.
3. Die Bereitschaft zu problemlösenden Arbeiten wird durch Ermutigungen und Tipps gefördert und unterstützt.
4. Die Einstiege in neue Themen erfolgen grundsätzlich mithilfe sinnstiftender Kontexte, die an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen und deren Bearbeitung sie in die dahinterstehende Mathematik führt.

5. Es wird im Rahmen der Unterrichtsökonomie genügend Zeit eingeplant, in der sich die Schüler*innen neues Wissen aktiv konstruieren und in der sie angemessene Grundvorstellungen zu neuen Begriffen entwickeln können.
6. Durch regelmäßiges wiederholendes teils auch integrierendes Üben werden grundlegende Fertigkeiten im Rahmen des Spiralprinzips immer wieder aktualisiert.
7. Im Unterricht werden an geeigneter Stelle differenzierende Aufgaben eingesetzt, um Über- und Unterforderungen weitmöglichst zu vermeiden.
8. Die Schüler*innen werden zu regelmäßiger, sorgfältiger und vollständiger Dokumentation der von ihnen bearbeiteten Aufgaben angehalten.
9. Auf die Notwendigkeit, aber auch die Eigenständigkeit eines solchen Portfolios wird in der Sekundarstufe II an geeigneten Stellen immer wieder hingewiesen.
10. Im Unterricht wird progressiv auf einen angemessenen Umgang mit fachsprachlichen Elementen geachtet.
11. Digitale Medien können an geeigneten Stellen des Unterrichts eingesetzt werden, wenn sie dem Lernfortschritt dienen.

3.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung

Auf der Grundlage von § 48 SchulG, § 13 APO-GOST sowie Kapitel 3 des Kernlehrplans Mathematik hat die Fachkonferenz im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen. Die nachfolgenden Absprachen stellen die Minimalanforderungen an das lerngruppenübergreifende gemeinsame Handeln der Fachgruppenmitglieder dar. Bezogen auf die einzelne Lerngruppe kommen ergänzend weitere der in den Folgeabschnitten genannten Instrumente der Leistungsüberprüfung zum Einsatz.

Verbindliche Absprachen:

- Die Aufgaben für Klausuren in parallelen Grund- bzw. Leistungskursen sollen im Vorfeld abgesprochen und gemeinsam gestellt werden.
- Klausuren können stets auch Aufgabenteile enthalten, die Kompetenzen aus weiter zurückliegenden Unterrichtsvorhaben oder übergreifende prozessbezogene Kompetenzen erfordern. Für eine regelmäßige Wiederholung der Inhalte und Methoden sind die Schüler*innen verantwortlich.
- Alle Klausuren in der EF- sowie der Q-Phase in den Grund- und Leistungskursen enthalten einen „hilfsmittelfreien“ Teil.
- Alle Klausuren in der Q-Phase enthalten auch Aufgaben mit Anforderungen im Sinne des Anforderungsbereiches III (vgl. Kernlehrplan Kapitel 4).
- Für die Aufgabenstellung der Klausuraufgaben werden die Operatoren der Aufgaben des Zentralabiturs verwendet.
Diese sind mit den Schüler*innen im ersten Halbjahr der EF zu besprechen.
- Die Korrektur und Bewertung der Klausuren erfolgt anhand eines kriterienorientierten Erwartungshorizontes, welches den Schüler*innen zur bei Nachfrage transparent gemacht werden muss.
Die vorgegebenen Korrekturzeichen sind einheitlich und durchgängig zu verwenden.
- Schüler*innen wird in allen Kursen Gelegenheit gegeben, mathematische Sachverhalte zusammenhängend (z. B. eine Hausaufgabe, einen fachlichen Zusammenhang, einen Überblick über Aspekte eines Inhaltsfeldes ...) selbstständig vorzutragen.

Verbindliche Instrumente:

Überprüfung der schriftlichen Leistung

- **Einführungsphase:** Zwei Klausuren je Halbjahr, davon die vierte als landeseinheitlich zentral gestellte Klausur.
Dauer der Klausuren: 90 Minuten. (Vgl. APO-GOST B § 14 und VV 14.1.)
- **Grundkurse Q-Phase:** Zwei Klausuren je Halbjahr.
Dauer der Klausuren: Nach dem zurzeit gültigen Beschluss der Fachkonferenz:
 - 90 Minuten in der Q1.1,
 - 135 Minuten in der Q1.2 und Q2.1 1. Quartal
 - 180 Minuten in der Q2.1 2. Quartal (Vgl. APO-GOST B § 14 (2) und VV 14.12)
 - 255 Minuten in der Q2.2 Vorabitur für Schüler*innen, die Mathematik als 3. Abiturfach gewählt haben. Die Zeit richtet sich nach den aktuellen Abiturprüfungsvorgaben.

- **Leistungskurs Q-Phase:** Zwei Klausuren je Halbjahr.
Dauer der Klausuren: Nach dem zurzeit gültigen Beschluss der Fachkonferenz:
 - 135 Minuten in der Q1.1,
 - 180 Minuten in der Q1.2 und
 - 225 Minuten in der Q2.1 1. Quartal (Vgl. APO-GOST B § 14 (2) und VV 14.2.)
 - 270 Minuten in der Q2.1 2. Quartal
 - 300 Minuten in der Q2.2 1. Quartal Vorabitur. Die Zeit richtet sich nach den aktuellen Abiturprüfungsvorgaben.
- **Facharbeit:** Alle Schüler*innen nehmen in der Q1 an einem Projektkurs teil. Zusätzlich können Schüler*innen, die eine Facharbeit im Fach Mathematik schreiben, eine Klausur in der Qualifikationsphase durch diese ersetzen. (Vgl. APO-GOST B § 14 (3) und VV 14.3.)

Überprüfung der sonstigen Leistung

In die Bewertung der sonstigen Mitarbeit fließen folgende Aspekte ein, die den Schüler*innen zu Beginn jedes Schuljahres bekanntgegeben werden müssen:

- Beteiligung am Unterrichtsgespräch (Quantität und Kontinuität)
- Qualität der Beiträge (inhaltlich und methodisch)
- Eingehen auf Beiträge und Argumentationen von Mitschüler*innen, Unterstützung von Mitlernenden
- Umgang mit neuen Problemen, Beteiligung bei der Suche nach neuen Lösungswegen
- Selbstständigkeit im Umgang mit der Arbeit
- Umgang mit Arbeitsaufträgen (Hausaufgaben, Unterrichtsaufgaben, ...)
- Anstrengungsbereitschaft und Konzentration auf die Arbeit
- Beteiligung während kooperativer Arbeitsphasen
- Darstellungsleistung, z. B. bei Referaten und beim Vortrag von Lösungswegen
- Führung des Portfolios
- Ergebnisse schriftlicher Übungen
- Erstellen von Protokollen
- Anfertigen zusätzlicher Arbeiten, z. B. eigenständige Ausarbeitungen im Rahmen binnendifferenzierender Maßnahmen, Erstellung von Computerprogrammen und die Bereitschaft dazu.

Übergeordnete Kriterien:

Die Bewertungskriterien für eine Leistung müssen den Schüler*innen transparent und klar sein. Die Fachkonferenz legt allgemeine Kriterien fest, die sowohl für die schriftlichen als auch für die sonstigen Formen der Leistungsüberprüfung gelten. Dazu gehört auch die Darstellung der Erwartungen für eine gute und für eine ausreichende Leistung

Konkretisierte Kriterien:

Kriterien für die Überprüfung der schriftlichen Leistung

Die Bewertung der schriftlichen Leistungen in Klausuren erfolgt über ein Raster mit Hilfspunkten, die im Erwartungshorizont den einzelnen Kriterien zugeordnet sind. Dabei sind in der Qualifikationsphase alle Anforderungsbereiche zu berücksichtigen, wobei der Anforderungsbereich II den Schwerpunkt bildet.

Die Zuordnung der Hilfspunktsumme zu den Notenstufen orientiert sich in der Einführungsphase an der zentralen Klausur und in der Qualifikationsphase am Zuordnungsschema des Zentralabiturs. Die Note ausreichend soll bei Erreichen von ca. 50% der Hilfspunkte erteilt werden. Vom genannten Zuordnungsschemata kann im Einzelfall begründet abgewichen werden, wenn sich z. B. besonders originelle Teillösungen nicht durch Hilfspunkte gemäß den Kriterien des Erwartungshorizontes abbilden lassen oder eine Abwertung wegen besonders schwacher Darstellung (APO-GOST §13 (2)) angemessen erscheint.

Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen

Im Fach Mathematik ist in besonderem Maße darauf zu achten, dass die Schüler*innen zu konstruktiven Beiträgen angeregt werden. Neben fachlich richtigen Beiträgen werden so auch Fragehaltungen, begründete Vermutungen, sichtbare Bemühungen um Verständnis und Ansatzfragmente als erste Stufe der sonstigen Leistungen mit zur Bewertung herangezogen.

Im Folgenden werden Kriterien für die Bewertung der sonstigen Leistungen jeweils für eine gute bzw. eine ausreichende Leistung dargestellt. Dabei ist bei der Bildung der Quartals- und Abschlussnote jeweils die Gesamtentwicklung der Schüler*in zu berücksichtigen, eine arithmetische Bildung aus punktuell erteilten Einzelnoten erfolgt nicht.

Grundsätze der Leistungsrückmeldung und Beratung:

Die Gesamtschule Kaarst-Büttgen hat unter Berücksichtigung von § 48 SchulG und §13 APO-GOST festgelegt, zu welchen Zeitpunkten, in welcher Form und unter welchen Voraussetzungen Leistungsrückmeldungen und eine Beratung im Sinne individueller Lern- und Förderempfehlungen erfolgen.

Leistungs- aspekt	gute Leistung	Anforderungen für eine ausreichende Leistung
	<i>Die Schüler*innen*in</i>	
Qualität der Unterrichtsbeträge	nennt richtige Lösungen und begründet sie nachvollziehbar im Zusammenhang der Aufgabenstellung	nennt teilweise richtige Lösungen, in der Regel jedoch ohne nachvollziehbare Begründungen
	geht selbstständig auf andere Lösungen ein, findet Argumente und Begründungen für ihre/seine eigenen Beiträge	geht selten auf andere Lösungen ein, nennt Argumente, kann sie aber nicht begründen
	kann ihre/seine Ergebnisse auf unterschiedliche Art und mit unterschiedlichen Medien darstellen	kann ihre/seine Ergebnisse nur auf eine Art darstellen
Kontinuität/ Quantität	beteiligt sich regelmäßig am Unterrichtsgespräch	nimmt eher selten am Unterrichtsgespräch teil
Selbstständigkeit	bringt sich von sich aus in den Unterricht ein	beteiligt sich gelegentlich eigenständig am Unterricht
	ist selbstständig ausdauernd bei der Sache und erledigt Aufgaben gründlich und zuverlässig	benötigt oft eine Aufforderung, um mit der Arbeit zu beginnen; arbeitet Rückstände nur teilweise auf
	strukturiert und erarbeitet neue Lerninhalte weitgehend selbstständig, stellt selbstständig Nachfragen	erarbeitet neue Lerninhalte mit umfangreicher Hilfestellung, fragt diese aber nur selten nach
	erarbeitet bereitgestellte Materialien selbstständig	erarbeitet bereitgestellte Materialien eher lückenhaft
Hausaufgaben	erledigt sorgfältig und vollständig die Hausaufgaben	erledigt die Hausaufgaben weitgehend vollständig, aber teilweise oberflächlich
	trägt Hausaufgaben mit nachvollziehbaren Erläuterungen vor	nennt die Ergebnisse, erläutert erst auf Nachfragen und oft unvollständig
Kooperation	bringt sich ergebnisorientiert in die Gruppen-/ Partnerarbeit ein	bringt sich nur wenig in die Gruppen-/ Partnerarbeit ein
	arbeitet kooperativ und respektiert die Beiträge anderer	unterstützt die Gruppenarbeit nur wenig, stört aber nicht
Gebrauch der Fachsprache	wendet Fachbegriffe sachgemessen an und kann ihre Bedeutung erklären	versteht Fachbegriffe nicht immer, kann sie teilweise nicht sachgemessen anwenden
Werkzeuggebrauch	setzt Werkzeuge im Unterricht sicher bei der Bearbeitung von Aufgaben und zur Visualisierung von Ergebnissen ein	benötigt häufig Hilfe beim Einsatz von Werkzeugen zur Bearbeitung von Aufgaben
Präsentation/	präsentiert vollständig, strukturiert	präsentiert an mehreren Stellen

Referat	und gut nachvollziehbar	eher oberflächlich, die Präsentation weist Verständnislücken auf
Portfolio	führt das Portfolio sorgfältig und vollständig	führt das Portfolio weitgehend sorgfältig, aber teilweise unvollständig
Schriftliche Übung	ca. 75% der erreichbaren Punkte	ca. 50% der erreichbaren Punkte

3.4 Lehr- und Lernmittel

Die Fachkonferenz erstellt eine Übersicht über die verbindlich eingeführten Lehr- und Lernmittel, ggf. mit Zuordnung zu Jahrgangsstufen (ggf. mit Hinweisen zum Elterneigenanteil). Ergänzt wird die Übersicht durch eine Auswahl fakultativer Lehr- und Lernmittel (z. B. Fachzeitschriften, Sammlungen von Arbeitsblättern, Angebote im Internet) als Anregung zum Einsatz im Unterricht.

Beide Sammlungen sind jährlich zu aktualisieren und auf einem gesonderten Blatt bei der Fachbereichsleitung hinterlegt. Dort können sie auf Anfrage eingesehen werden.

4 Entscheidungen zu fach- und unterrichtsübergreifenden Fragen

Zusammenarbeit mit anderen Fächern

Fach- und aufgabenfeldbezogene sowie übergreifende Absprachen, z. B. zur Arbeitsteilung bei der Entwicklung übergreifender curricularer Kompetenzen (ggf. Methodentage, Projektwoche, Projektkurs, Facharbeitsvorbereitung, Schulprofil ...) sind wünschenswert und werden so oft wie möglich zu realisieren versucht.

Die Fachkonferenz Mathematik hat sich im Rahmen des Schulprogramms und in Absprache mit den betreffenden Fachkonferenzen auf folgende, zentrale Schwerpunkte geeinigt.

Der Mathematikunterricht in der Oberstufe ist in vielen Fällen auf reale oder realitätsnahe Kontexte bezogen. Insbesondere erfolgt eine Kooperation mit den naturwissenschaftlichen Fächern auf der Ebene einzelner Kontexte. An den in den vorangegangenen Kapiteln ausgewiesenen Stellen wird das Vorwissen aus diesen Kontexten aufgegriffen und durch die mathematische Betrachtungsweise neu eingeordnet. Der besonderen Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften soll dadurch Rechnung getragen werden, dass die Erkenntnis von Zusammenhängen mathematisiert werden kann.

Geplant ist eine Kooperation z. B. mit der Geographie und den Sozialwissenschaften, in denen deskriptive Statistik und das Argumentieren mit Hypothesen im Sinne der beurteilenden Statistik eine Rolle spielt.

Der Mehrwert des CAS-Rechners wird fächerübergreifend durch die naturwissenschaftlichen Fachschaften genutzt.

Wettbewerbe

Für die Sekundarstufe II hat die Fachgruppe eine Sammlung mit Themen und Aufgaben aus vergangenen Känguru-Wettbewerben und geeigneten Mathematik-Olympiaden.

Die Teilnahme an den Wettbewerben wird den Schüler*innen in Absprache mit der Stufenleitung ermöglicht.

Projekttag

Alle 3 Jahre werden an der Emmy-Noether-Gesamtschule Projekttag durchgeführt. Die Fachkonferenz Mathematik bietet in diesem Zusammenhang mindestens ein Projekt für Schüler*innen der gymnasialen Oberstufe an.

5 Qualitätssicherung und Evaluation

Das schulinterne Curriculum stellt keine starre Größe dar, sondern ist als „lebendiges Dokument“ zu betrachten. Dementsprechend sind die Inhalte stetig zu überprüfen, um ggf. Modifikationen vornehmen zu können. Die Fachkonferenz (als professionelle Lerngemeinschaft) trägt durch diesen Prozess zur Qualitätsentwicklung und damit zur Qualitätssicherung des Faches bei.

Auf der ersten Fachkonferenz eines jeden Schuljahres ist das schulinterne Curriculum Tagesordnungspunkt, um Ergänzungen, Verbesserungen oder Änderungen vorzustellen, zu beraten und zu beschließen.

Durch parallele Klausuren (vgl. 2.3) in den Grundkursen, durch Diskussion der Aufgabenstellung von Klausuren in Fachdienstbesprechungen und eine regelmäßige Erörterung der Ergebnisse von Leistungsüberprüfungen wird ein hohes Maß an fachlicher Qualitätssicherung erreicht.

Jeweils vor Beginn eines neuen Schuljahres, d. h. erstmalig nach Ende der Einführungsphase im Sommer 2020 werden in einer Sitzung der Fachkonferenz für die nachfolgenden Jahrgänge zwingend erforderlich erscheinende Veränderungen diskutiert und ggf. beschlossen, um erkannten ungünstigen Entscheidungen schnellstmöglich entgegenwirken zu können.

6 Inkrafttreten

Dieses schulinterne Curriculum der Emmy-Noether-Gesamtschule zum Kernlehrplan für die Gymnasiale Oberstufe tritt ab dem Schuljahr 2023/2024 beginnend für die 11. Jahrgangsstufe (Einführungsphase – EF) und ab dem Schuljahr 2024/2025 beginnend für die 12. Jahrgangsstufe (Qualifikationsphase – Q1) in Kraft.